1. Szuprémum elv

H halmaz részhalmaza R-nek

H nem üres

H felülről korlátos

* R minden nem üres felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai közt van legkisebb

1. Teljes indukció elve

tegyük fel minden n természetes számra adott egy A(n) állítás

A(0)ra igaz

ha A(n)re igaz akkor A(n+1)re is igaz

* mindenre igaz

1. Archimedes tétel

minden a>0 és b valós számra létezik n természetes szám, amire a\*n > b

1. Cantor-féle közösrész-tétel

[an, bn] részhalmaz Rnek

[an+1, bn+1] részhalmaza [an, bn]

a plusz végtelenbe menő metszetük nem üreshalmaz

1. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű\*

A, B eleme R

ha lim(an) = A és lim(an) = B => A=B

1. Konvergencia és korlátosság kapcsolata

minden konvergens sorozat korlátos

visszafele nem igaz, a korlátosság szükséges de nem elégséges feltétele a konvergenciának

1. Műveletek nullsorozatokkal

legyen an és bn nullsorozat, cn korlátos sorozat

(an+bn) is nullsorozat

(an\*bn) is nullsorozat

(an\*cn) is nullsorozat

1. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

tegyük fel an és bn sorozatoknak van határértéke

A,B eleme R felülvonás, lim an = A és lim bn = B

ekkor lim (an\*bn) = AB, amennyiben A\*B értelmezve van

1. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel

tegyük fel an és bn sorozatoknak van határértéke

A,B eleme R felülvonás, lim an = A és lim bn = B

bn nem nulla

ekkor lim (an/bn) = A/B, amennyiben A/B értelmezve van

1. A közrefogási elv

legyen an, bn és cn korlátos sorozatok

ha létezik N természetes szám, amire minden n>N: an <= bn <= cn

an és cn sorozatoknak van határértéke és lim an = lim cn = A

akkor lim bn = A

1. A határérték és a rendezés kapcsolata\*

ilyen a közrefogási elv is

legyen lim(an)=A és lim(bn)=B

ha A > B => létezik n’ természetes szám, amire minden n>n’: an>bn

ha létezik n’ természetes szám, amire minden n>n’: an >= bn => A >= B

ezek visszafele nem biztos hogy igazak

1. Monoton növő sorozat határértéke

felülről korlátos monoton növő sorozat konvergens és lim(an) = sup{an|n term szám}

felülről nem korlátos monoton növő sorozat határértéke +végtelen

1. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

legyen an valós sorozat és vn indexsorozat

létezik olyan (a o v)(n) részsorozat ami monoton csökkenő vagy növő

1. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok

legyen an és bn végtelen sorok

minden N természetes számra: 0 <= an <= bn, minden n>N

majoráns kritérium: ha bn konvergens => an is konvergens

minoráns kritérium: ha an divergens => bn is konvergens

1. A Cauchy-féle gyökkritérium

n-ed gyök alatt |an|

ha 0 <= A < 1 a SUM an abszolút konvergens

ha A > 1 a SUM an divergens

ha a=0 a SUM an lehet konvergens és divergens is

ez akkor bukik el, ha A=1

pl. an=1/n, bn=1/n^2 és cn=(-1)^n/n

ekkor lim(n-ed gyök alatt |an|) = lim(n-ed gyök alatt |bn|) = lim(n-ed gyök alatt |cn|) = 1

közben an divergens, bn abszolút konvergens, cn meg konvergens de nem abszolút konvergens

1. A D’Alembert-féle hányadoskritérium

|an+1|/|an|

ha 0 <= A < 1 SUM an abszolút konvergens

ha A > 1 a SUM an divergens

ha a=0 a SUM an lehet konvergens és divergens is

ez akkor bukik el, ha A=1

pl. an=1/n, bn=1/n^2 és cn=(-1)^n/n

ekkor lim(|an+1|/|an|)= lim(|bn+1|/|bn|)= lim(|cn+1|/|cn|)= 1

közben an divergens, bn abszolút konvergens, cn meg konvergens de nem abszolút konvergens

1. Abszolút konvergens sorok átrendezése

abszolút konvergens sor átrendezése is absz konv és összege ugyanaz, mint az eredeti soré

1. Hatványsorok konvergencia halmaza intervallum

(-1,1)re x^n, ahol n=0

(-1,1]re (-1)^n/n\*x^n, ahol n=0

[-1,1)re x^n/n, ahol n=0

[-1,1]re x^n/n^2, ahol n=0

1. A Cauchy-Hadamard tétel == Hatványsorok konvergenciahalmaza

SUM n=0 alfan(x-a)^n, ahol x valós szám

a konvergencia halmaz az alábbi egymást kizáró esetek közül az egyik

1)) létezik R > 0 valós szám, hogy a hatványsor x valós szám esetén absz konv ha |x-a| < R és div ha |x-a| > R

2)) a hatványsor csak az x=a pontban konvergens => R = 0

3)) a hatványsor minden x valós szám esetén konvergens => R = +végtelen

=> a konvergenciasugár tehát: 0 <= R <= +végtelen

1. Sorok téglány szorzata

legyen SUM an, ahol n=0 és SUM bn, ahol n=0 konv végtelen sorok téglányszorzata SUM tn, ahol n=0

tn = SUM, ahol n=max{i,j} aibj (n=0,1,2,3..)

1. Függvények határértékének egyértelműsége\*

A, B eleme R

ha lim(f(x)) = A és lim(f(x)) = B => A=B

1. A határértékre vonatkozó átviteli elv

legyen f fg valósból valósba képez, a’ eleme Df és A eleme R felülvonás

* lim f a = A, minden xn természetesből Df\{a}ba és lim(xn) / a
* lim n megy +végtelenbe (f(xn)) = A

1. Monoton függvények határértéke

f monoton növekvő (alfa,beta)-n:

lim f a+0 = inf{ f(x) | x eleme (alfa,beta), x>a}

lim f a-0 = sup{ f(x) | x eleme (alfa,beta), x<a}

monoton csökkenő (alfa,beta)-n:

lim f a+0 = sup{ f(x) | x eleme (alfa,beta), x>a}

lim f a-0 = inf{ f(x) | x eleme (alfa,beta), x<a}

1. Az összetett függvény folytonossága

f,g megy valósból valósba

g eleme C{a} és f eleme C{g(a)} => fog eleme C{a}

* az összetett fg örökli a belső és a külső fg folytonosságát

1. Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos

ha f folytonos [a,b]-nm akkor ott f korlátos

1. Weierstrass tétele

legyen -végtelen < a < b < +végtelen

ha f megy [a,b]ből valósba folytonos az [a,b]n, akkor fnek létezik abszolút maximum és absz minimumhelye

* létezik alfa, beta eleme [a,b]: f(alfa) <= f(x) <= f(beta)

1. A Bolzano-tétel

legyen f megy [a,b]ből valósba folytonos fg

ha f a két végpontban különböző értéket vesz fel <= f(a)\*f(b) < 0

* létezik epszilon eleme (a,b), amire f(epszilon) = 0